1. GAIA, Klaserako ariketen Ebazpena

1.- Sarrera $x(t)$ eta irteera $y(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$ daukan sistema

a) Lineala da?
b) Inbariantea da?
c) Sarrera $x(t)= \cos 2\pi t$ izanik kalkulatu eta irudikatu $y(t)$ T-ren balio hauetarako T= 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/12
d) Aurreko atala errepikatu beste sarrera honekin x(t) = $e^t \cdot cos\ 2\pi t$

2.- Bedi $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ esponentzial konplexua, ω_0 oinarrizko frekuentzia eta T_0 oinarrizko periodoa daukana. $x(t)$ seinalearen laginak uniformeki tartekatuak harturik $x_d[n]$ seinale diskretua lortuko dugu: $x_d[n] = x(nT) = e^{j\omega_0 nT}$

a) Frogatu $x_d[n]$ periodikoa dela baldin eta soilik baldin T/T_0 zenbaki arrazionala den, hau da, T lagintze periodoaren multiploren bat, $x(t)$-ren periodoaren multiploren baten berdina bada.
b) $x_d[n]$ periodikoa izanik, hau da $T/T_0 = p/q$, p eta q osoak direlarik, zein da $x_d[n]$–ren periodoa eta zein oinarrizko maiztasuna?
c) $x(t)$-ren zenbat periodo behar dira $x_d[n]$–ren periodo bateko laginak lortzeko?z

---

a) $x_d[n] = x_d[n+N]$ betetzen den frogatu behar da $e^{j\omega_0 nT} \stackrel{?}{=} e^{j\omega_0 (n+N)T} = e^{j\omega_0 nT} \cdot e^{j\omega_0 NT}$ egia da hau betetzen denean: $e^{j\omega_0 NT} = 1$ ==> $\omega_0 NT = k2\pi$ k zenbaki osoa delarik ==> $(2\pi/T_0)NT = k2\pi$ ==> $T/T_0 = k/N$

b) $T/T_0 = k/N = p/q$ oinarrizko periodoa N_0, k txikienari dagokio, beraz sinplifikatuz:
$k/N_0 = (p/\text{zkt}(p,q))/(q/\text{zkt}(p,q))$ $\underline{N_0 = q/\text{zkt}(p,q)}$

c) $\underline{k = p/\text{zkt}(p,q)}$

$\omega o := 2$

$x(t) := e^{j \cdot \omega o \cdot t}$ $t := 0, 0.01 .. 20$

Re(x(t))

t

$\omega o := 10$ $x(t) := e^{j \cdot \omega o \cdot t}$

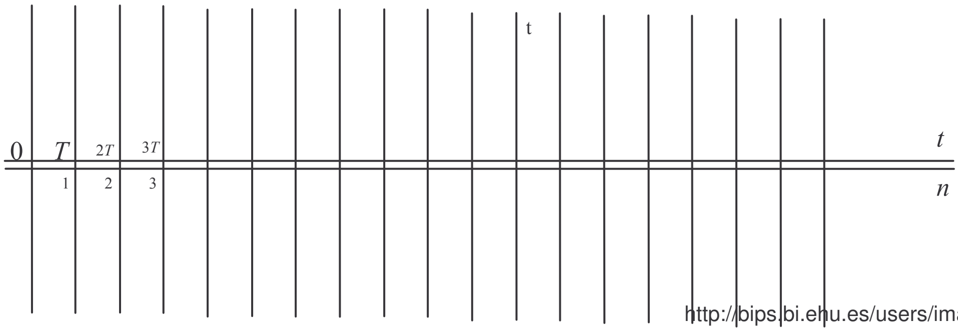
Re(x(t))

t

$\omega o := 3$ $x(t) := e^{j \cdot \omega o \cdot t}$

Re(x(t))

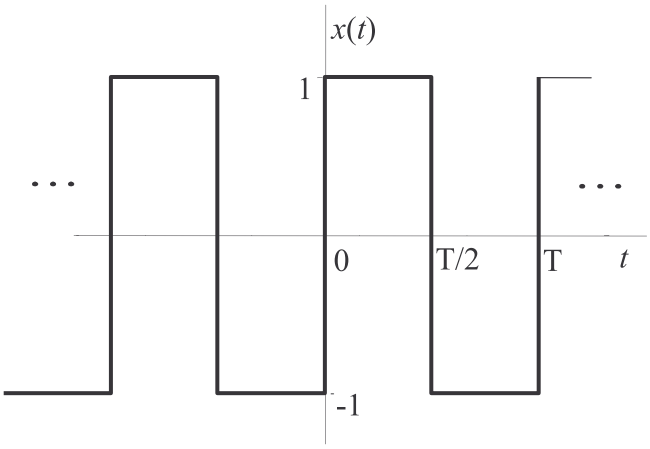
t



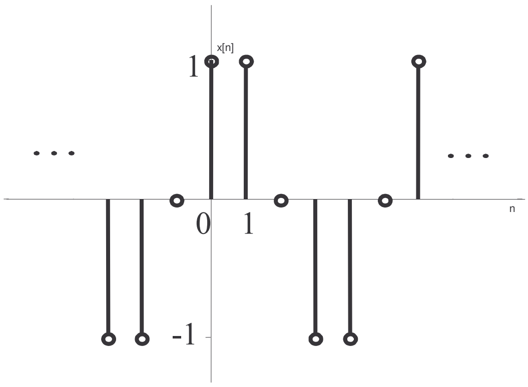
3.- $x(t)$ eta $h(t)$ T periodoarekin periodikoak badira, $y(t) = x(t) * h(t)$ ez da konbergentea. Horregatik konboluzio periodikoa definitzen da:

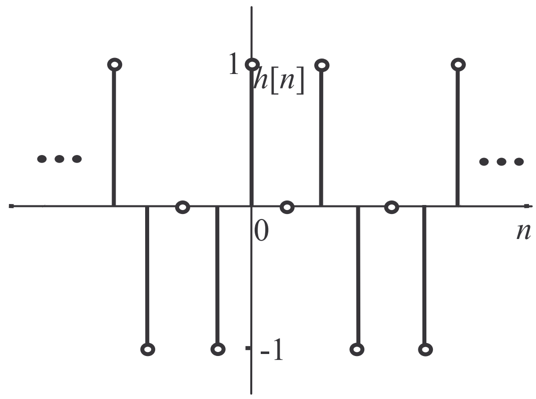
$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_0^T x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

a) $y(t)$ ere T periodoarekin periodikoa dela frogatu.
b) Integrazio tartea T iraupeneko edozein izan daitekeela frogatu.
c) $y(t) = x(t) \otimes x(t)$ kalkulatu, $x(t)$ irudiko seinalea izanik:



Seinale diskretu periodikoentzako, $x[n]$ eta $h[n]$ N laginetako periodokoak izanik, konboluzio periodikoaren





definizioa hau da: $y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]h[n-k]$,

d) *a)* eta *b)* atalak errepikatu.
e) Irudiko $x[n]$ eta $h[n]$ sekuentzien konboluzio periodikoa kalkulatu:

---

a) $y(t) \overset{?}{=} y(t+T) = \int_0^T x(\tau)\, \underbrace{h(t+T-\tau)}_{=h(t-\tau)}\, d\tau = \int_0^T x(\tau)h(t-\tau)d\tau = y(t)$

periodikoa delako

4.- $x(t)$ eta $w(t)$ funtzioen korrelazio gurutzatua honela definitzen da: $\phi_{xw}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t+\tau)w^*(\tau)d\tau$

$w(t) = x(t)$ kasu berezirako $x(t)$ seinalearen autokorrelazio funtzioa definitzen da: $\phi_{xx}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t+\tau)x^*(\tau)d\tau$

a) Frogatu: $\phi_{xw}(t) = x(t) * w^*(-t)$ eta $\phi_{xx}(t) = x(t) * x^*(-t)$
b) $\phi_{xw}(t)$ eta $\phi_{wx}(t)$ funtzioen arteko erlazioa aurkitu
c) $x(t)$ erreala bada, frogatu $\phi_{xx}(t)$ bikoitia dela
d) Bedi $y(t) = x(t-t_0)$. $\phi_{yw}(t)$, $\phi_{yx}(t)$ eta $\phi_{yy}(t)$ adierazi $\phi_{xw}(t)$ edo $\phi_{xx}(t)$ seinaleen funtzio bezala
e) $\phi_{xw}(t)$ korrelazioa kalkulatu eta irudikatu, baldin eta $x(t) = e^{-at}\cdot u(t)$ non $a > 0$ eta $w(t) = u(t-2)$
f) $\phi_{xx}(t)$ kalkulatu $x(t) = e^{-at}\cdot u(t)$, $a > 0$ izanik
g) $\phi_{xx}(t)$ aurkitu $x(t) = e^{(j\omega_0-\alpha)t}\, u(t)$ izanik

---

a) $\phi_{xw}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t+\tau)w^*(\tau)d\tau \underset{\{t+\tau=\tau'\}}{=} \int_{-\infty}^{\infty}x(\tau')w^*(\tau'-t)d\tau' \underset{\{u(t-\tau)=w^*(-(t-\tau))\}}{=} \int_{-\infty}^{\infty}x(\tau')u(t-\tau')d\tau' \underset{\{u(t)=w^*(-t)\}}{=} x(t)*w^*(-t)$

edo aldagai aldaketa bakarrarekin:

$\phi_{xw}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t+\tau)w^*(\tau)d\tau \underset{\{\tau=-\tau'\}}{=} -\int_{\infty}^{-\infty}x(t-\tau')w^*(-\tau')d\tau' = w^*(-t)*x(t) = x(t)*w^*(-t)$

eta $\phi_{xx}(t) = x(t) * x^*(-t)$ aurrekoan w --> x ordezkatuz zuzenan.

b) Integralean, definizioan, $\{t+\tau = \tau'\}$ ordezkatuz.
Edo dotoreago: $\phi_{xw}(t) = x(t) * w^*(-t)$ eta $\phi_{wx}(t) = w(t) * x^*(-t)$ direla aurkitu dugu aurreko atalean.
Konjokatuz: $\phi_{wx}^*(t) = \left(w(t) * x^*(-t)\right)^* = w^*(t) * x(-t)$ <-- konboluzio integralaren termino eta faktore bakoitza konjokatu.
eta alderatuz $\underline{\phi_{wx}^*(-t)} = w^*(-t) * x(t) = x(t) * w^*(-t) = \underline{\phi_{xw}(t)}$

c) Aurreko ataletik dakigu $\phi_{xx}(t) = \phi_{xx}^*(-t) =$
eta $x(t)$ erreala denez $= \phi_{xx}(-t)$ ==> autokorrelazioa bikoita da.

d) $y(t) = x(t-t_0)$

$$\phi_{yy}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}y(t+\tau)y^*(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-t_0+\tau)x^*(\tau-t_0)d\tau \underset{\{\tau-t_0=\tau'\}}{=} \int_{-\infty}^{\infty}x(t+\tau')x^*(\tau')d\tau'=\phi_{xx}(t)$$

$\phi_{yw}(t) = y(t) * w^*(-t) = x(t-t_0) * w^*(-t) = \delta(t-t_0) * x(t) * w^*(-t) = \delta(t-t_0) * \phi_{xw}(t) = \phi_{xw}(t-t_0)$
$\phi_{yx}(t) = y(t) * x^*(-t) = x(t-t_0) * x^*(-t) = \phi_{xx}(t-t_0)$

e) Tarteka integratu, kasu bi daude t-ren funtzioan

$t<-2$ $\phi_{xw}(t)=\int_{-t}^{\infty}e^{-a(t+\tau)}d\tau=e^{-at}\cdot\left[\frac{e^{-a\tau}}{-a}\right]_{-t}^{\infty}=1/a$

$t>-2$ $\phi_{xw}(t)=\int_{2}^{\infty}e^{-a(t+\tau)}d\tau=e^{-at}\cdot\left[\frac{e^{-a\tau}}{-a}\right]_{2}^{\infty}=e^{-a(t+2)}/a$

Biak batuta: $\boxed{\phi_{xw}(t)=\frac{1}{a}u(-t-2)+\frac{1}{a}e^{-a(t+2)}u(t+2)}$

f) $t<0$ $\phi_{xx}(t)=\int_{-t}^{\infty}e^{-a(t+\tau)}\cdot e^{-a\tau}d\tau=e^{-at}\cdot\left[\frac{e^{-2a\tau}}{-2a}\right]_{-t}^{\infty}=e^{at}/2a$

$t>0$ $\phi_{xx}(t)=\int_{0}^{\infty}e^{-a(t+\tau)}\cdot e^{-a\tau}d\tau=e^{-at}\cdot\left[\frac{e^{-2a\tau}}{-2a}\right]_{0}^{\infty}=e^{-at}/2a$

$\phi_{xx}(t)$ bikoitia da, $x(t)$ erreala delako

g) $t<0$ $\phi_{xx}(t)=...=e^{(j\omega_0+\alpha)t}/2\alpha$
$\phi_{xx}(t)$ ez da bikoitia $x(t)$ erreala ez delako. b) ataletik dakigu
$\phi_{xx}(t)=\phi_{xx}^*(-t)$ (simetria hermitikoa) $t>0$ $\phi_{xx}(t)=e^{(j\omega_0-\alpha)t}/2\alpha$