2. GAIA, Klaserako ariketak.   Ebazpena

3.- Ariketa honen helburua edozein seinale periodiko termino kopuru finituko Fourier serie bidez, edo oro har, edozein funtzio ortogonalen multzo batez, adieraztea seinalearen hurbilketa hona lortzeko eraginkorra dela frogatzea da.

$u(t)$ eta $v(t)$ seinale bi (a,b) tartean ortogonalak dira hau betetzen bada: $\int_a^b u(t)v^*(t)dt = 0$

hau da, euren energia gurutzatua tarte horretan zero bada. Gainera bakoitzaren energia tarte horretan unitatea bada ortonormalak dira tarte horretan.
$\{\phi_i(t)\}$ seinale multzoa, $i=0, \pm1, \pm2, \pm3,...$ izanik, (a,b) tartean ortogonala/ortonormala da seinale guztiak beraien artean ortogonalak/ortonormalak badira tarte horretan.

a) $\phi_i(t) = e^{ji\omega_0 t}$ multzoa $(0,T_0)$ tartean, $T_0 = 2\pi/\omega_0$ izanik, ortogonala dela frogatu. Ortonormala da?.

$a \le t \le b$ tartean $x(t)$ seinalearen hurbilketa hau hartu dezagun: $x_N(t) = \sum_{i=-N}^{N} a_i \phi_i(t)$

a_i konstanteak konplexuak dira oro har. $x(t)$ eta $x_N(t)$-ren arteko desbideraketa neurtzeko $e_N(t)$ errorea definitzen dugu: $e_N(t) = x(t) - x_N(t)$
Hurbilketaren kalitatearen neurri bat errore seinalearen energia (a,b) tartean da, hau da, batezbesteko errore koadratikoa: $E = \int_a^b |e_N(t)|^2 dt$

b) Frogatu batezbesteko errore koadratikoa minimizatzen duen hurbilketa, koefizienteak balio hau daukatenean lortzen dela: $a_i = \int_a^b x(t)\phi^*{}_i(t)dt$ edozein seinale multzo ortonormalekin

c) Zehaztu a_i balio ortogonalak, baina ez ortonormalak, diren $\phi_i(t)$ seinale multzo batentzat, norma hau daukatelarik: $A_i = \int_a^b |\phi_i(t)|^2 dt$

d) $\phi_i(t) = e^{ji\omega_0 t}$ multzorako, $T_0 = 2\pi/\omega_0$ iraupeneko tartea aukeratuz, hurbilketaren E balioa minimizatzen duten a_i koefizienteen espresioa lortu. Ze koefiziente dira hauek?

---

a) $\int_0^{T_0} \phi_i(t)\cdot\phi_k^*(t)dt = \int_0^{T_0} e^{ji\omega_0 t}\cdot e^{-jk\omega_0 t}dt = \int_0^{T_0} e^{j(i-k)\omega_0 t}dt = \dfrac{e^{j(i-k)2\pi}-1}{j(i-k)\omega_0} = \begin{cases} 0 & \forall i \ne k \\ \dfrac{j2\pi}{\omega_0} = T_0 & i = k \end{cases}$

Beraz ortogonala da baina ez ortonormala.

b) $x(t)$ seinale periodikoa $x_N(t)$ konposaketarekin hurbiltzean daukagun errore seinalea

$e_N(t) = x(t) - x_N(t) = x(t) - \sum_{i=-N}^{N} a_i\phi_i(t)$

Errore seinalearen energia, batezbesteko errore koadratikoa, hurbilketaren kalitatearen neurria da

$$E = \int_a^b |e_N(t)|^2 dt = \int_a^b e_N(t)e_N^*(t)dt = \int_a^b \left[x(t) - \sum_{i=-N}^{N} a_i\phi_i(t)\right]\cdot\left[x^*(t) - \sum_{i=-N}^{N} a_i^*\phi_i^*(t)\right]dt =$$

$$= \int_a^b \left[|x(t)|^2 - \sum_{i=-N}^{N} a_i x^*(t)\phi_i(t) - \sum_{i=-N}^{N} a_i^* x(t)\phi_i^*(t) + \sum_{i=-N}^{N} a_i\phi_i(t)\cdot\sum_{l=-N}^{N} a_l^*\phi_l^*(t)\right]dt = ...$$

a_i koefizienteak ez dira denboraren funtzio, beraz integraletik atera daitezke.
Laugarren terminoan $2N+1$ terminoko batukari bi biderkatzean $(2N+1)^2$ termino agertzen dira. Koefiziente·funtzio bikote i-garren bakoitza l-garren bikote bakoitzarekin biderkatuz.

$$\sum_{i=-N}^{N} a_i \cdot \sum_{l=-N}^{N} a_l^* \int_a^b \phi_i(t)\phi_l^*(t)dt$$

$\{\phi_i(t)\}$ seinale multzo ortogonala denez $\int_a^b \phi_i(t)\phi_l^*(t)dt = 0$ $i\ne1$ denean, beraz $i=1$ daukaten $2N+1$ terminoak baino ez dira gelditzen, eta hauetan

$\{\phi_i(t)\}$ seinale multzo orto**normala** denez $\int_a^b \phi_i(t)\phi_i^*(t)dt = \int_a^b |\phi_i(t)|^2 dt = 1$

$$... = E = \int_a^b |x(t)|^2 dt - \sum_{i=-N}^{N} a_i \int_a^b x^*(t)\phi_i(t)dt - \sum_{i=-N}^{N} a_i^* \int_a^b x(t)\phi_i^*(t)dt + \sum_{i=-N}^{N} |a_i|^2$$

E errorearen minimo erlatiboa bilatu a_i-rekiko deribatua $= 0$ den balioa aurkituz.

$a_i = b_i + jc_i$ $\quad \frac{dE}{da} = \frac{\partial E}{\partial b_i} + j\frac{\partial E}{\partial c_i}$ parte erreala eta irudiarekiko deribatu, biak aparte egin eta ondoren batu.

$$\frac{\partial E}{\partial b_i} = -\int_a^b x^*(t)\phi_i(t)dt - \int_a^b x(t)\phi_i^*(t)dt + 2b_i = 0 \rightarrow b_i = Er\left\{\int_a^b x(t)\phi_i^*(t)dt\right\}$$

$$\frac{\partial E}{\partial c_i} = -j\int_a^b x^*(t)\phi_i(t)dt + j\int_a^b x(t)\phi_i^*(t)dt + 2c_i = 0 \rightarrow c_i = Ir\left\{\int_a^b x(t)\phi_i^*(t)dt\right\}$$

$$\boxed{a_i = \int_a^b x(t)\phi_i^*(t)dt}$$

Koefiziente horiek hartuta egindako hurbilketak daukan errorea hau da:

$$E = \int_a^b |x(t)|^2 dt - \sum_{i=-N}^{N} a_i a_i^* - \sum_{i=-N}^{N} a_i^* a_i + \sum_{i=-N}^{N} |a_i|^2 = \int_a^b |x(t)|^2 dt - \sum_{i=-N}^{N} |a_i|^2$$

= Seinalearen energia — hurbilketaren energia , zeren $\int_a^b x_N(t)\cdot x_N^*(t)dt = \sum_{i=-N}^{N} |a_i|^2$

Seinale osatzeko osagai kopuru finitua, murriztua, erabili nahi badut, osagaien anplitudea (a_i) ez da osagai kopuruaren (N) funtzio. Beraz kopuru txikiarekin hasi gaitezke, eta errorea txikitzeko osagai gehiago hartu nahi baditugu, aurretik kalkulatutako osagaien anplitudeak berean mantendu ditzakegu.

c) Aurreko ataleko errorearen adierazpenean laugarren terminoa bakarrik aldatzen da.

$$E = ... + A_i \cdot \sum_{i=-N}^{N} |a_i|^2$$

Deribatu partzialetan ere askeneko terminoa A_i-rekin biderkatzen agertuko da.

$$... + A_i \cdot b_i = 0 \rightarrow b_i = \frac{1}{A_i} Er\left\{\int_a^b x(t)\phi_i^*(t)dt\right\}$$

$$... + A_i \cdot c_i = 0 \rightarrow c_i = \frac{1}{A_i} Ir\left\{\int_a^b x(t)\phi_i^*(t)dt\right\} \rightarrow \boxed{a_i = \frac{1}{A_i}\int_a^b x(t)\phi_i^*(t)dt}$$

d) Aurreko formulan $a_i = \frac{1}{A_i}\int_a^b x(t)\phi_i^*(t)dt$

ordezkatuz $(a,b) \rightarrow T_0$

eta a) atalean lortu dugunez $A_i \rightarrow T_0$ ordezkatuz $\rightarrow \boxed{a_i = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-ji\omega_0 t}dt}$

Fourier serie koefizienteak dira.